

## 数学の学習における知覚学習法

鵜沼秀行\*・長谷川 桐\*\*・Philip J. Kellman \*\*\*

### Perceptual-Learning Methods in Mathematics Learning

Hideyuki UNUMA, Hisa HASEGAWA, Philip J. Kellman

#### Abstract

Mathematics learners often have to acquire conceptual and procedural knowledge. Recent studies, however, have suggested that other aspects of learning, such as perceptual learning, also play a critical role in the learning process. Perceptual learning interventions used in learning mathematics by junior high school, high school, and university students in Japan and the US are briefly described. Moreover, the effects of two computer algorithms known as perceptual learning modules (PLMs) on perceptual learning are discussed. Practice in observing structures of equations across transformations by using the algebra PLM (Kellman & Massey, 2008) improved learners' abilities to solve equations. Furthermore, practice in matching fractions to graphical representations by using the fraction transformation PLM (Unuma, Hasegawa, & Kellman, 2016) improved the speed of fraction problem solving. These results suggest that PLMs can produce rapid advances in learning mathematics and that perceptual learning techniques offer the potential to address crucial aspects of learning.

Keywords: Perceptual learning, Teaching learning methods, Mathematics learning, Algebra, Fractions

本研究は、数学の学習における学習者の知覚活動の役割を心理学の観点から検討、評価する。数学の学習および教授においては基礎学力の構成要素として、数学的な概念についての知識、計算のルールなどの手続き知識に加えて、視覚的表現の生成と変換が指摘されている（例えば、市川他, 2009）。我々の研究の目標は、知覚学習モジュール（Perceptual Learning Module, 以

---

\*教授 知覚・認知心理学

\*\*非常勤講師

\*\*\*カリフォルニア大学

下、PLM) と呼ばれる学習アルゴリズムを用いて、学習者が数式や文章題から視覚的表現の生成と変換を訓練することによって、数学的な課題をより正確で速やかに解決できるように支援することである。

本稿で取り上げる研究は、PLM および関連する方法を、日本と米国における中学生、高校生、大学生に適用し、その効果を検討した実験的研究である。実験の結果は、PLM を用いた介入が一般的な数学の学習成績において十分に優れた成果を上げることを示してきた。本稿の最後では、これらの実験結果が数学の学習と教授においてこれまで比較的軽視されてきた知覚的側面の再評価を促すとともに、人間の学習行動の理解に基本的な概念的枠組みを提供することが論じられる。

## 数学の学習における知覚学習効果の検証

### 知覚学習の手続き：PLM の原理

本研究の目的は、数学の学習における PLM の効果を検証し、評価することである。PLM は、一般に数学の材料に限らず、知覚学習の材料からの情報の符号化と変換を促進する学習アルゴリズムであり、コンピュータ上で学習者の学習過程を制御する。その原理は、学習者が多数の事例を分類することによって、課題に関連した情報を選択的に抽出することを可能にしようとするものである (Kellman & Massey, 2013)。学習される材料は、数学における数式、グラフ、割合の言語的表現 (Kellman et al., 2008)、分数表現 (鵜沼, 長谷川, Kellman, 2014, 2016) のほか、生物の形態 (Metter & Kellman, 2014) やレントゲンの画像 (Kellman, 2013)、漢字 (Thai, Metter, & Kellman, 2011)、顔表情 (Hasegawa, Unuma, Kellman, 2013; Unuma, Hasegawa, Kellman, 2016) など、きわめて多様である。

PLM に共通する手続きの特徴は、(1) 対象の構造との交渉、(2) 課題解決の未遂行、(3) 変化する事例の多数の分類試行、の3点に要約できる (Kellman, Massey & Son, 2010; 鵜沼・長谷川, 2013)。(1) 課題の構造との交渉とは、材料の構造的な情報へ注意、弁別、分類、さらに変換を通して、学習者の知覚が変容する過程をさす。構造的な情報への注意とは、漢字の場合は偏と旁の関係など (Thai et al., 2011)、割合の文章題では、関連する数字の論理的な関係に注意し視覚的表現に変換すること (Kellman et al., 2008) をさす。(2) 課題解決の未遂行とは、PLM を用いた学習段階では実際に課題を解くことがないことである。代数の数式表現を分類する代数 PLM (Kellman et al., 2008) では、実際に代数の問題を解くことはない。また、代数に必要な概念的知識や計算の手続き的知識が直接に学習者に教授されることもない。(3)

変化する事例の多数の分類試行とは、PLMにおいて学習者に多くの事例が提示され、それらに共通する不変な関係を抽出することが学習者に求められることをさす。そのためには、事例のセットが、問題となる不変な関係以外でさまざまに変化することが同時に必要である。

PLMの効果は、一般に対照群を用いた事前テスト—事後テスト計画（Pretest-Posttest Design）によって検証される。テストの段階で用いられる課題はPLMにおける事例のカテゴリ—分類課題とは異なる。例えば、代数PLMでは実際に紙と鉛筆で代数の問題を解くことが課題である。またPLMで提示される課題材料とテストで提示される課題材料は異なり、個別に問題の記憶ではなく材料に共通する構造的な情報の学習効果がテスト段階では測定される。すなわち、事前テストから事後テストへの成績の向上量が、PLMを用いた実験群とPLM用いない対照群と比較され、PLMを用いた実験群のほうがテスト成績の向上量が大きいことが予測される。

以下では、具体的に代数と分数の理解における知覚学習の効果を検討した研究が取り上げられる。代数（Kellman et al., 2008）と分数（鶴沼, 長谷川, Kellman, 2014, 2016）に関する研究はいずれもPLMの原理にしたがった知覚学習課題の効果を検証したものである。いずれの知覚学習課題においても、数式的な表現に含まれる論理的な関係を視覚的に変換することが要求された。

### 代数の理解と知覚学習

代数PLM（Kellman et al., 2008, Experiment 2）は、文字式の変形・変換を視覚的におこなひ、正しい変換の事例を選択・分類する課題であった。例えば、コンピュータ画面の上部に  $6y + 5x - 20 = 43$  というターゲット式が提示され、その下部に4つの選択肢、

- A  $6y - 20 = 43 + 5x$
- B  $6y - 20 = 43(-5x)$
- C  $6y - 20 = 43 - 5x$
- D  $6y - 20 = 43 - x - 5$

が提示された。学習者は、A～Dのうちターゲット式を正しく変形した式を1つ選択した。試行ごとに学習者には正解がフィードバックされた。この実験の参加者は、米国の中学3年生（8th grade）と高校1年生（9th grade）であった。事前テストが初日におこなわれ、続く2日間にPLMを用いた学習が実施された。翌日に事後テストが実施され、一部の参加者については2週間後に遅延事後テストが実施された。参加者は数式の変形の種類によって異なる4つの学習条件に無作為に配分された。なお、教育現場での実施のため、倫理的な観点からPLMを

用いない対照条件は設定されなかった。実験の結果、いずれの学習条件においても正答率の上昇と反応時間の減少が認められた。

その後さらに、代数 PLM に次の改良が加えられた (Kellman et al. 2008, Experiment 3)。まず選択肢が 4 つから 3 つに減らされるとともに、変換に加減乗除が導入された。さらに、学習者ごとに学習の進行にともなって学習カテゴリーの系列が適応的に操作された (「適応的系列化」adaptive sequencing)。これは、PLM による学習を通じて、学習者の成績を追跡・評価し、学習項目とそのカテゴリーが各学習者の学習を最も促進するタイミング提示されるものであった。なお、学習カテゴリーは計算操作 (加減乗除) と移項の有無の組み合わせ (8 カテゴリー) であった。

具体的には、学習者の正答率と反応時間を用いて、当該項目やカテゴリーが再度学習者にいつ提示されるかが決定された。各項目には当該試行の正当 (誤答) と反応時間、直近の試行からの時間などいくつかの変数に基づいて、試行毎に更新される優先順位得点が与えられた。この得点に基づいて、たとえば誤答の項目は学習強度 (learning strength) が低いと判断されて、比較的早く学習者に提示された。一方、学習強度が高くなるにしたがって、項目は保持時間が長くなるように提示された。心理学的な構成概念としての学習強度は正反応の反応時間によって近似され、当該学習者の個々の項目の保持時間 (提示間隔) は反応時間の関数として (反応時間が短いほど) 延長された。さらに、ある項目が一定の試行数に正答され、かつ反応時間が一定の基準よりも短かいと、その項目は学習セットから除かれた。これは「離脱」(retirement) と呼ばれた。

学習強度は心理学的な構成概念であり、将来のテストにおいて正答する確率に関わっている。新たに提示された項目の学習強度は低いが、一般に学習試行の増加とともに学習強度は高くなる。学習強度が低いと評価された項目が早く学習者に提示され、学習強度が高い項目の提示間隔が長く操作された。その理由として、「検索努力仮説 (retrieval effort hypothesis)」(Pyc and Rawson, 2009) が挙げられた。この仮説は学習段階ではより困難で、かつ成功する検索が学習効率の向上に有効であると仮定する。また、離脱とは、反応時間と正答率をもとに設定された学習達成基準に到達した学習カテゴリーについて、学習を打ち切ることをさす。これにより、学習者は未達成の学習カテゴリーに「検索努力」を集中的に配分することが可能となると仮定される。

改良された代数 PLM は、56 人の高校生 (ほとんどが 9th grade) と 38 人の中学生 (8th grade) に適用された。まず事前テストが実施され、その後、2 日ないし 3 日間の PLM による学習が 1 日 40 分から 50 分実施された。その翌日に事後テストが実施され、遅延事後テストは

3週間後であった。参加者は、学習カテゴリーの提示条件の異なる幾つかの条件に無作為に配分された。ここでも倫理的な理由から PLM を用いない対照条件は設定されなかった。実験の結果、全ての条件で正答率の増加と反応時間の減少が認められた。

### 分数の量的判断と知覚学習

さて、数学の学習・教育において、分数の理解が数学的な一般的知識の獲得と学習に関連することが指摘されてきた (e.g., Siegler, Thompson, Schneider, 2011, Siegler et al, 2012)。しかしながら、一方で分数の学習が教育の現場において深刻な困難さを抱えてきたことは、米国、日本など多くの国々で問題とされてきた (Nunes & Bryant, 2008; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Yoshida & Sawano, 2002)。実際、米国の National Mathematics Advisory Panel (2008, p. 18) は、代数の教育以前に分数の教育が重要であることを指摘している。そこで、我々は代数 PLM の考え方を分数の学習に適用して分数変換—知覚学習モジュール (以下、分数変換 PLM) を作製し、分数による認知的判断課題における効果を検証した (鶴沼他, 2014, 2016)。

分数変換 PLM は、分子と分母で表現された一般的な数字表現を視覚的な図表現へと変換することによって、分数の量的な判断をより正確で速く可能にすることを目的として開発された。従来、分数による量的な判断では、大学生でもしばしば誤反応を生じることが報告されてきた (e.g., Bonato, Fabbri, Umiltà, & Zorzi, 2007)。米国における入学の難易度が比較的高い大学 (Carnegie Mellon University, Pittsburgh) の学生を対象とした実験でも誤反応率が5%程度、一般的なコミュニティカレッジの大学生に同種の課題を実施した場合には30%の誤反応率が報告されている (Schneider & Siegler, 2010)。本研究における分数変換 PLM については、Schneider & Siegler (2010) において用いられた量的判断課題を用いて、日本人大学生を対象として PLM による学習効果の検証をおこなった。

検討された分数変換 PLM は、パーソナルコンピュータ画面上に提示された真分数 (たとえば、 $5/6$ ) について、その量 (0.83) を正しく図示した棒グラフを6つの選択肢から選ぶ試行で構成された (詳しくは、鶴沼他 (2016) を参照)。試行毎に学習者の反応に対して正解がフィードバックされた。実験は、事前テスト、学習 (約60分: PLM条件, あるいは対照条件)、直後事後テスト (ここまでは同日に実施された)、遅延事後テスト (1週間後) からなっていた。事前および事後テストでは、Schneider & Siegler (2010) と同様に、2つの真分数の量についての大小比較判断が課された。テストの結果は正答率と反応時間を指標として分析された。

分数の大小比較という量的な判断においては、自然数と同じようにその量が内的に心的数線 (mental number line) に表現されることが仮定される (Schneider & Siegler, 2010)。2つの分

数の大小を量的に判断する際には、両者が同一の心的数線上に位置付けられ、両者の量的な差異が大きいほど、心的数線上の距離が大きくなると仮定される。判断はこの心的数線上の距離の対数が大きいほど容易であり、したがって反応時間が短くなると仮定される（「距離の効果」 distance effect）。したがって、分数変換 PLM の検証においては、PLM の効果によって分数の心的数線上への変換の精度が向上し、大小比較における距離の効果がより明瞭になることが予測された（鵜沼他, 2016）。

実験の結果、反応時間から分数の距離の対数への回帰直線の当てはまりの程度を指標として、距離の効果の分析がおこなれた。対照条件よりも PLM 条件において、事後テストにおける距離の効果が事前テストよりも明確であり、1週間後の遅延事後テストでも同様の結果であった。すなわち、分数変換 PLM によって、数字表現された分数の視覚的表現への変換が促進され、心的数線上での比較がより正確で速やかにおこなれるように変化したと言える。これは、分数の量的表現という心理的表象の精度が PLM を用いた知覚学習によって向上し、その結果、数量的な判断の処理がより円滑におこなわれたことを示している。

## 知覚学習と学習過程

### 数学の学習における PLM の効果

これまでの実験から、代数 PLM と分数変換 PLM が、視覚的な処理を促進させることによって、数学的な操作にもとづく認知的な課題の成績を向上させることが示された。PLM が、比較的短時間の実施（1日40分から60分で、1日から3日間程度）によって、数学的な表現を用いた材料にふくまれる論理的な関係情報（代数の変形規則、分数の表現する量）の抽出と視覚的な変換を促進する可能性が示唆されたと言える。PLM は一般に視覚的な情報にもとづく多数の事例の分類課題であり、実際にテストで用いられるような数学的な課題の解答を要求するものではない。それにも関わらず、日常的な数学的課題の成績を向上させたことは、一般的な数学的課題の解決に、視覚的な情報の抽出と変換という処理が重要な役割を果たすことを示していると言えるだろう。

数学の課題解決とその学習における視覚的表現の有効性を示す事例は PLM に限らない。最近、Mickey & McClelland (in press) は、米国の高等数学教育において微積分学の準備となる段階の三角法 (Trigonometry) の教育を取り上げ、単位円 (Unit Circle) と呼ばれる図的表現を用いた学習の効果を検証している。大学生を対象とした実験の結果、単位円を用いた大学生は、計算規則に基づいた解決法を学んだ学生よりも事後テストにおいて成績の向上をみせた。

Mickey & McClelland (in press) が学習において仮定する視空間的表現 (visuospatial representation) の特徴は、漸進的な統合と精緻化 (gradual integration and elaboration), 外在化から内在化へ (externalization then internalization), 一般的内容か、それとも特殊か (generic vs. specific content), という3点にある。つまり、単位円の利用は、他の一般的な心的表現、たとえばメンタルモデル (Johnson-Laird, 1983), 心的イメージ (e.g., Shepard, 2008) と異なり、時間をかけた漸進的な連合の過程をとおして概念的な構造化を促す。この過程で、視空間的表現が外在化された表現から内在化された概念的体系へと変換される。また、単位円は、特殊で身近な内容の事例ではなく、より抽象的で一般的なものであり、他の課題への一般化可能性をもつ。これらの学習過程のメカニズムは、McClelland (2013) において神経ネットワークモデルとしてモデル化されている。

本研究における PLM を用いた知覚学習は、いくつかの点で Mickey & McClelland (in press) における視空間的表現と共通する知覚的表現の形成を仮定する。まず、PLM による知覚学習は、知覚の変容過程で単純な特徴の処理から特徴間の高次の関係の処理へと移行する (Kellman et al., 2010)。たとえば、分数変換 PLM では、分数の分子と分母の個別に処理からそれらの関係の抽出、さらに量的表現への変換が促進される。実験では、形成される知覚表象の精度が向上したことが「距離効果」を指標として示された。さらに PLM による知覚学習は、統合的な処理の変化と同時に選択的な情報抽出を可能とする。代数 PLM では、さまざまに変化する学習材料の中から課題に関連した部分のみの選択的な情報抽出が可能となると考えられる。この選択性という点で、PLM が仮定する情報処理の変容過程は、Petrov, Doshier, & Lu (2005) における「選択的な再荷重モデル」に近いと言える。

一方、Mickey & McClelland (in press) における外在化から内在化への変化について、PLM は類似した仮定をおいてはいない。しかし、PLM は学習者の知覚的变化を発見効果 (discovery effects) と流暢性効果 (fluency effects) の2点からとらえる (Kellman et al., 2010)。発見効果とは、上述した選択的な情報抽出と、特徴間の高次の関係を見出すことをさす。これに対して流暢性効果とは、処理速度が上昇するとともに注意の負荷が減少し、情報の処理が直列処理 (serial processing) から並列処理 (parallel processing) へと変化することをさす。したがって知覚学習の過程は課題に適切な情報の発見から、より流暢な処理への変化の過程として捉えられる。

また、Mickey & McClelland (in press) における一般的内容か、それとも特殊かという観点については、PLM によって形成される知覚的表現は個々の事例の記憶の集積ではなく、抽象化された表現であると仮定される。実際、代数 PLM では数式の変形のみを分類することが課

されたが、テスト段階では PLM とは異なる代数の問題を紙と鉛筆で解くことが求められた。代数 PLM で学習された知覚的表象は、数式の変形規則についての視覚的な一般的特徴を表現した抽象的な表現から成り立っていたと考えられる。また、分数変換 PLM においても、検証段階のテスト課題では PLM の刺激セット（分子分母とも 1 桁の真分数）とは異なり、分子分母とも 2 桁の数字を用いた真分数が用いられた。また、PLM 課題も、テスト段階における 2 つの分数の大小判断ではなく、1 つの分数の分子と分母の関係から量的表象を形成するのみであった。したがって分数変換 PLM においても、形成される知覚表象は分数の量的な表現という抽象化された視覚的表象である。

### PLM による知覚学習の一般性

PLM による知覚学習は、数学の学習以外にも適用されたきた。画像 (Kellman, 2013)、文字 (Thai et al., 2011)、顔表情 (Hasegawa et al., 2013) などの知覚において、PLM による知覚学習が情報抽出の精度と速度を向上させることが示されてきた。さらに、それらの学習の効果は、日常の複雑な認知的課題の解決に転移することが示唆された。例えば、レントゲン画像についての PLM は、実際の医学教育の現場においてその効果（統計的な効果量は .70 を上回る）が確認された (Kellman, 2013)。これらの結果は、われわれの日常的な行動において、これまで軽視されてきた心理学的側面、すなわち知覚学習過程の意義を問い直すものである。文字の知覚やレントゲン画像の判断などは、これまで個別の事例についての知識の集積と概念的な知識によって規定されると考えられてきた。しかし、このような知識が対象の構造的な情報の知覚と結びつくことによって初めて複雑な課題の遂行が可能となると言えるであろう。

知覚学習の技術としての PLM は、上述のように様々な場面で効果が認められてきたが、今後さらに検討されるべき課題として次のような点を指摘することができる。まず、PLM がもたらす知覚学習の効果がどのような学習のメカニズムによるのかを理論的に明らかにすることである (Kellman et al., 2010, pp. 301-302)。PLM は多数の事例を比較・分類する課題で構成されるが、この比較で誘発されるのはどのような情報処理効果であろうか。Schwartz & Bransford (2004, p. 479) が指摘するように、事例のセットを処理する機会は学習者が見逃していた情報に対して敏感になることを可能にし、その結果、事例を他と区別するような特徴や次元を学習者に気づかせる、という見解は有力な説であると思われる。この説は、学習における分化 (differentiation) を重視する観点であり、これは Gibson, E. (1969) における知覚学習説に源をたどることができる。

このような知覚学習過程は、いくつかの神経ネットワークモデルによってモデル化されてき



た (e.g., Petrov et al., 2005)。本研究が取り上げた事態よりも比較的な単純な事態における知覚学習をモデル化したこれらの神経ネットワークモデルは、刺激の弁別と分類、それに伴うフィードバックによって、特定の情報を検出する分析器の荷重を増加させ、そのほかの分析器の荷重を減少させる。ただし、本研究が取り上げるような複雑な知覚学習課題においては、既存の特徴だけではなく新たな構造を生成することが必要となる (Kellman et al., 2010, p. 302)。したがって、これらの神経ネットワークモデルが高次の知覚学習の処理メカニズムと共通する機構を表現する可能性が今後検討される必要があろう。

PLM の可能性を検討するうえで今後に残されたもうひとつの課題は、学習技術 (learning technology) として学習効率をさらに向上させるための PLM の具体的な改善方法を開発することである。すでに、学習者の学習水準に応じた適応的 (adaptive) な学習事例の提示方法が学習効率の向上に寄与することが示されてきた (e.g., Kellman et al., 2008; Kellman, 2013)。ここでは、学習の進行に伴う各試行の反応時間を主要な指標として、提示される学習項目のカテゴリーの系列が各学習者に適応するように操作された。今後、具体的な課題における具体的な学習系列の決定アルゴリズムが各 PLM に実装されることが望まれる。また、これらの課題に共通する学習系列操作の原理がプログラミング可能な形で定式化されることが期待される。それによって、学習者の個人差や学習水準に応じた適応的な知覚学習の方法が開発されれば、学校教育現場に限らず広く産業、交通、研究開発などの諸分野においても、これまでとは異なる観点、すなわち個人の知覚学習を考慮に入れた訓練、学習システムの開発が期待できるであろう。

## 引用文献

- Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *33*, 1410-1419.
- Gibson, E.J. (1969). *Principles of Perceptual Learning and Development*. New York: Appleton-Century-Crofts.
- Hasegawa, H., Unuma, H., & Kellman, P. J. (2013). Perceptual learning of facial expressions. *Journal of Vision*, *13* (9), Vision Sciences Society, 254.
- 市川伸一・南風原朝和・杉澤武俊・瀬尾美紀子・清河幸子・犬塚美輪・村山航・植阪友理・小林寛子・篠ヶ谷圭太 (2009). 数学の学力・学習力診断テスト COMPASS の開発. *認知科学*, *16* (3), 333-347.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kellman, P. J. (2013). Adaptive and perceptual learning technologies in medical education and training. *Military Medicine*, *178* (10 Suppl), 98-106. <http://doi.org/10.7205/MILMED-D-13-00218>

- Kellman, P. J., & Massey, C. M. (2013). Perceptual Learning, Cognition, and Expertise. In *Psychology of Learning and Motivation, Volume 58* (Vol. 58, pp. 117–165). <http://doi.org/10.1016/B978-0-12-407237-4.00004-9>
- Kellman, P. J., Massey, C., Roth, Z., Burke, T., Zucker, J., Saw, A., Aguero, K. E., & Wise, J. A. (2008). Perceptual learning and the technology of expertise: Studies in fraction learning and algebra. *Pragmatics & Cognition, 16* (2), 356–405.
- Kellman, P. J., Massey, C. M., & Son, J. Y. (2010). Perceptual Learning Modules in Mathematics: Enhancing Students' Pattern Recognition, Structure Extraction, and Fluency. *Topics in Cognitive Science, 2* (2), 285–305. <http://doi.org/10.1111/j.1756-8765.2009.01053.x>
- McClelland, J. L. (2013). Incorporating rapid neocortical learning of new schema-consistent information into complementary learning systems theory. *Journal of Experimental Psychology: General, 142* (4), 1190–1210.
- Mettler, E., & Kellman, P. J. (2014). Adaptive response-time-based category sequencing in perceptual learning. *Vision Research, 99*, 111–23. <http://doi.org/10.1016/j.visres.2013.12.009>
- Mickey, K., & McClelland, J. L. (in press). The Unit Circle as a Grounded Conceptual Structure in Pre-Calculus Trigonometry. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. Ochsendorf, & K. M. Koepke (Eds.), *Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts* (pp. 1–47). Elsevier/Academic Press.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundation for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. U.S. Department of Education.
- Nunes, T., Bryant, P. (2008). *Key understanding in mathematics learning. Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities*. [www.nuffieldfoundation.org](http://www.nuffieldfoundation.org).
- Petrov, A. A., Doshier, B. A., & Lu, Z. L. (2005). The dynamics of perceptual learning: An incremental reweighting model. *Psychological Review, 112* (4), 715–743.
- Pyc, M. A., & Rawson, K. A. (2009). Testing the retrieval effort hypothesis: Does greater difficulty correctly recalling information lead to higher levels of memory? *Journal of Memory and Language, 60* (4), 437–447
- Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 36* (5), 1227–38. <http://doi.org/10.1037/a0018170>
- Schwartz, D. L., & Bransford, J. D. (2004). A time for telling. *Cognition & Instruction, 16* (4), 475–522.
- Shepard, R. N. (2008). The step to rationality: The efficacy of thought experiments in science, ethics, and free will. *Cognitive Science, 32* (1), 3–35.
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23* (7), 691–697. <http://doi.org/10.1177/0956797612440101>
- Siegler, R. S., Thompson, C. a, & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62* (4), 273–96. <http://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14* (503–518).
- Thai, K., Mettler, E., & Kellman, P. (2011). Basic Information Processing Effects from Perceptual Learning in Complex, Real-World Domains. In In L. Carlson, C. Holscher, & T Shipley (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA: Cognitive Science Society. (Vol. 11, pp. 555–560). Retrieved from <http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/Proceedings/2011/papers/0102/paper0102>.

pdf

鵜沼秀行・長谷川桐 (2013). 知覚学習における介入効果の測定とその方法論的問題 川村学園女子大学研究紀要, 第 24 巻, 第 1 号, 65-78.

鵜沼秀行・長谷川桐, Kellman, P. J. (2014). 知覚学習による分数の表象の精緻化 日本心理学会第 78 回総会論文集

[http://www.myschedule.jp/jpa2014/tex\\_output/source/jpa2014\\_poster/90483.pdf](http://www.myschedule.jp/jpa2014/tex_output/source/jpa2014_poster/90483.pdf)

鵜沼秀行・長谷川桐・Kellman, P. J. (2016). 知覚学習による分数の心的表象の精度向上 川村学園女子大学研究紀要, 第 27 巻, 第 1 号, 35-49.

Unuma, H., Hasegawa, H., Kellman, P. J. (2016). Perceptual learning technology improves the mapping of ambiguous facial expressions to emotional category words, 31st. International Congress of Psychology, *International Journal of Psychology*, Volume 51, Issue S1, 1024.

<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ijop.12348/full>

Yoshida, H., & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, 44, 183-195.